Лабораторна робота № 12. Чисельне інтегрування

1. Квадратурні формули

Розглядатимемо чисельні алгоритми наближеного знаходження інтегралів вигляду

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

де $f(x)$ – неперервна на інтервалі $[a;b]$ функція.

Наближене обчислення інтегралу (1) полягає у заміні підінтегральної функції $f(x)$ наближеною до неї функцією $\varphi(x)$ такою, щоб інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ можна було легко обчислити.

За функцію $\varphi(x)$ доцільно вибрати інтерполяційний многочлен, зокрема многочлен Лагранжа (многочлен легко інтегрується).

Нехай $\varphi(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_n^{(i)}(x) f(x_i)$, де

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)},$$

тоді

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_n^{(i)}(x) f(x_i)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i),$$

де $A_i^{(n)} = \int_a^b L_n^{(i)}(x)dx$ – ***квадратурні коефіцієнти***, x_i – ***квадратурні вузли***.

Таким чином, маємо ***квадратурну формулу*** наступного вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + R_n,$$

де R_n – залишковий член многочлена Лагранжа.

Для знаходження площі криволінійної трапеції, яка обчислюється за допомогою означеного інтеграла, проміжок інтегрування розбивають на n (найчастіше однакової довжини) підпроміжків. Площу криволінійної трапеції , отриману на кожному з цих проміжків обчислюють наближено, заміняючи її фігурою (наприклад, прямокутником). Після чого інтеграл шукається як сума отриманих на кожному з відрізків розбиття наближених площ.

2. Метод прямокутників (центральних)

Проміжок інтегрування $[a;b]$ розбиваємо на n відрізків однакової довжини точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

На кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ інтеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, замінимо площею прямокутника з шириною h та висотою $f\left(\dfrac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ (рис. 1):

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right). \qquad (2)$$

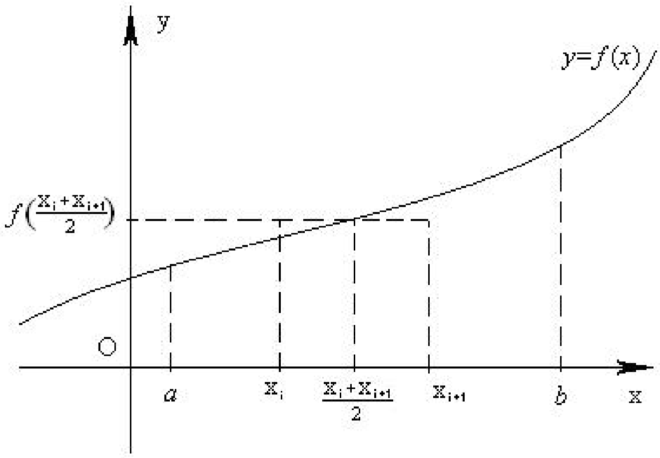

Рис. 1

Похибку методу прямокутників можна отримати з розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора в точці $\dfrac{a+b}{2}$. В результаті отримаємо похибку методу прямокутників

$$|\varepsilon| \le \frac{h^2}{24}(b-a)M, \qquad (3)$$

де $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ – крок обчислень.

Формула прямокутників дає точні результати для многочленів першого степеня. З формули (3) випливає, що зменшення кроку в 2 рази приводить до збільшення точності в 4 рази, тобто $\varepsilon_{2h} = 4\varepsilon_h$.

На основі цього використовують практичний спосіб оцінки похибки (правило Рунге)

$$\varepsilon_h = \frac{1}{3}|I_{2h} - I_h| \qquad (4)$$

3. Метод трапецій

У методі трапецій підінтегральну функцію $f(x)$ на проміжку $[x_i; x_{i+1}]$ замінюємо лінійною функцією, графік якої – пряма, що проходить через точки $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (рис.2), тобто застосовується лінійна інтерполяція функції $f(x)$.

Площу криволінійної трапеції $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ замінюють площею трапеції з основами $f(x_{i+1})$ та $f(x_i)$ і висотою $x_{i+1} - x_i$. Тоді

$$I_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i).$$

Якщо відрізки $[x_i, x_{i+1}], i = 0,1,\ldots,n-1$ є однаковими, то введемо величину $h = x_{i+1} - x_i$ і тоді формула трапецій матиме наступний вигляд

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} h + R_n = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) + R_n. \quad (5)$$

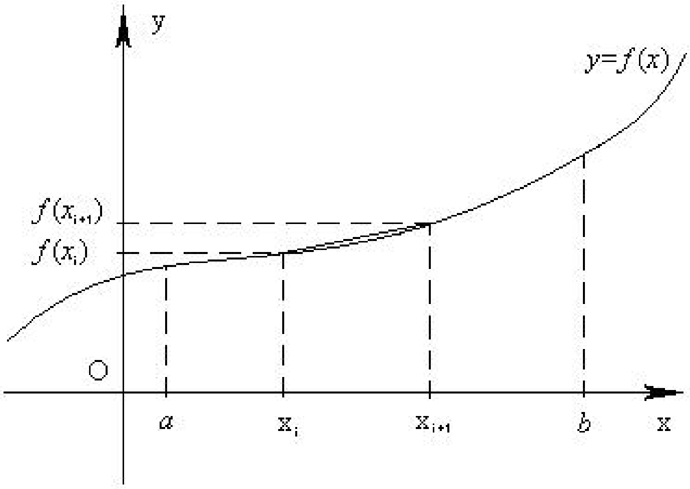

Рис. 2

Похибка методу трапецій

$$|\varepsilon| \le \frac{h^2}{12}(b-a)M, \quad (6)$$

де $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ – крок обчислень.

Похибка методу трапецій вдвічі більша ніж у методі прямокутників.
Для практичної оцінки похибки можна скористатись правилом Рунге (4).
Формула трапецій є точною для многочленів першого степеня.

4. Метод Сімпсона

У цьому методі підінтегральну функцію $f(x)$ на проміжку $[x_i; x_{i+2}]$ замінюють квадратичною параболою, графік якої – парабола, що проходить через точки $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$ (рис. 3), тобто виконують квадратичну інтерполяцію функції $f(x)$.

Застосуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа для побудови рівняння параболи, що проходить через ці точки

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} f(x_i) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} f(x_{i+1}) +$$

$$+\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}f(x_{i+2}).$$

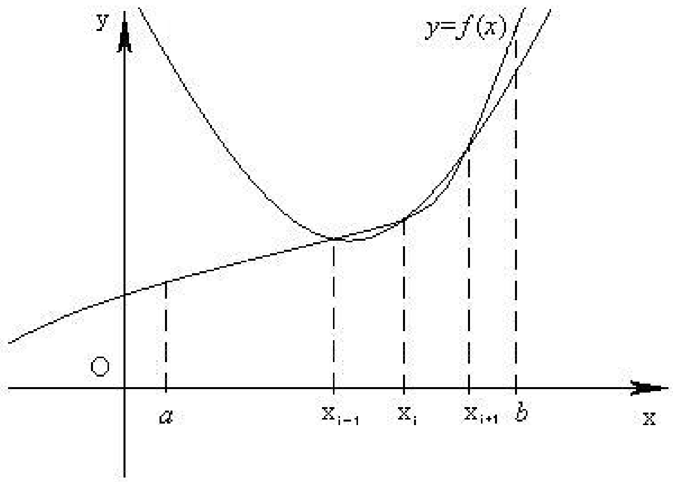

Рис. 3

Тоді

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi(x)dx = \frac{x_{i+2}-x_i}{6}\left(f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})\right).$$

Розділимо інтервал $[a;b]$ на парну кількість $n=2k$ однакових відрізків $[x_i;x_{i+1}]$, $i=0,1,...,2k-1$ і позначимо $h=x_{i+1}-x_i$.

Знаходячи шуканий інтеграл як суму площ таких криволінійних трапецій, отримуємо наближену формулу методу Сімпсона

$$I=\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{k}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{k-1}f(x_{2i})\right). \tag{7}$$

Похибка методу Сімпсона

$$|\varepsilon| \le \frac{h^4}{180}(b-a)M, \tag{8}$$

де $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(IV)}(x)\right|$, $h=\frac{(b-a)}{n}$ – крок обчислень.

Практичну оцінку похибки можна отримати за правилом Рунге, виконавши обчислення з кроком h та $2h$. З (8) випливає, що похибка зміниться в 16 разів, тобто $\varepsilon_{2h}=16\varepsilon_h$.

Тоді

$$\varepsilon_h=\frac{1}{15}\left|I_{2h}-I_h\right| \tag{9}$$

5. Обчислення інтегралу методом прямокутників засобами OpenOffice

Обчислимо інтеграл $\int_0^3 \left(x + \sin^2 x\right) dx$ і оцінимо похибку обчислень за правилом Рунге (4). Обчислення будемо проводити з кроками $h = 0{,}3$ та $2h = 0{,}6$.

1. Запускаємо програму **OpenOffice.Calc**, переходимо на вільний робочий лист. Створюємо таблицю, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F
1	x(h)	x(2h)	h=			
2			x/2(h)	f(x/2)(h)	x/2(2h)	f(x/2)(2h)
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13	Сума					
14	Значення інтегралу					
15	Похибка обчислень					

Рис. 4

2. Задаємо кроки обчислення та відповідні квадратурні вузли

Комірка	Формула (значення)
D1	0,3
E1	=D1*2
A3	=A2+$D$1
B3	=B2+$E$1

3. Копіюємо формули в клітинках **A3** та **B3** в межах стовчика включно до клітинок **A12** та **B7** відповідно.

4.Визначаємо середини інтервалів інтегрування і застосовуємо формулу методу центральних прямокутників

Комірка	Формула (значення)
C3	=(A2+A3)/2
D3	=C3+SIN(C3)^2
E3	=(B2+B3)/2
F3	=E3+SIN(E3)^2

5. Копіюємо введені формули в клітинках **C3, D3, E3** та **F3** в межах стовчика включно до **C12, D12, E7** та **F7** відповідно.

6. Обчислюємо відповідні суми, значення інтегралу та похибку наближеного обчислення за формулою Рунге (4)

Комірка	**Формула (значення)**
D13	**=SUM(D3:D12)**
F13	**=SUM(F3:F7)**
D14	**=D13*D1**
F14	**=F13*E1**
F15	**=ABS(F14-D14)/3**

В результаті виконання обчислень отримаємо (рис.5)

	A	B Сумма	C	D	E	F
1	x(h)	x(2h)	h=	0,3	0,6	
2	0	0	x/2(h)	f(x/2)(h)	x/2(2h)	f(x/2)(2h)
3	0,3	0,6	0,1500	0,1723	0,3000	0,3873
4	0,6	1,2	0,4500	0,6392	0,9000	1,5136
5	0,9	1,8	0,7500	1,2146	1,5000	2,4950
6	1,2	2,4	1,0500	1,8024	2,1000	2,8451
7	1,5	3	1,3500	2,3020	2,7000	2,8827
8	1,8		1,6500	2,6437		
9	2,1		1,9500	2,8130		
10	2,4		2,2500	2,8554		
11	2,7		2,5500	2,8610		
12	3		2,8500	2,9326		
13	Сума			20,2364		10,1237
14	Значення інтегралу			6,0709		6,0742
15	Похибка обчислень					0,0011

Рис. 5

6. Обчислення інтегралу методом трапецій засобами OpenOffice

Обчислимо той самий інтеграл $\int_0^3 \left(x+\sin^2 x\right)dx$ методом трапецій і оцінимо похибку обчислень за правилом Рунге (4). Обчислення будемо проводити з кроками $h = 0{,}3$ та $2h = 0{,}6$.

На новому робочому листі створюємо таблицю і вводимо наступні формули (рис.6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x(h)	x(2h)	f(x)(h)	f(x)(2h)	h=	0,3	=F1*2	
2	0	0	=A2+SIN(A2)^2	=B2+SIN(B2)^2				
3	=A2+$F$1	=B2+$G$1	=A3+SIN(A3)^2	=B3+SIN(B3)^2		(f(a)+f(b))/2	=(D2+D7)/2	
4	=A3+$F$1	=B3+$G$1	=A4+SIN(A4)^2	=B4+SIN(B4)^2		Сума(h)	=SUM(C3:C11)+G3	
5	=A4+$F$1	=B4+$G$1	=A5+SIN(A5)^2	=B5+SIN(B5)^2		Сума(2h)	=SUM(D3:D6)+G3	
6	=A5+$F$1	=B5+$G$1	=A6+SIN(A6)^2	=B6+SIN(B6)^2	Значення інтегралу (h)		=G4*F1	
7	=A6+$F$1	=B6+$G$1	=A7+SIN(A7)^2	=B7+SIN(B7)^2	Значення інтегралу (2h)		=G5*G1	
8	=A7+$F$1		=A8+SIN(A8)^2					
9	=A8+$F$1		=A9+SIN(A9)^2					
10	=A9+$F$1		=A10+SIN(A10)^2					
11	=A10+$F$1		=A11+SIN(A11)^2					
12	=A11+$F$1		=A12+SIN(A12)^2		Похибка обчислень		=ABS(G6-G7)/3	

Рис.6

В результаті виконання обчислень отримаємо (рис.7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x(h)	x(2h)	f(x)(h)	f(x)(2h)	h=	0,3	0,6
2	0	0	0,0000	0,0000			
3	0,3	0,6	0,3873	0,9188	(f(a)+f(b))/2		1,5100
4	0,6	1,2	0,9188	2,0687	Сума(h)		20,2258
5	0,9	1,8	1,5136	2,7484	Сума(2h)		10,1021
6	1,2	2,4	2,0687	2,8563	Значення інтегралу (h)		6,0677
7	1,5	3	2,4950	3,0199	Значення інтегралу (2h)		6,0613
8	1,8		2,7484				
9	2,1		2,8451				
10	2,4		2,8563				
11	2,7		2,8827				
12	3		3,0199		Похибка обчислень		0,0022

Рис. 7

7. Обчислення інтегралу методом Сімпсона засобами OpenOffice

Обчислимо інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx$ методом Сімпсона і оцінимо похибку обчислень за правилом Рунге (9). Обчислення будемо проводити з кроками $h = 0{,}125$ та $2h = 0{,}250$.

Переходимо на новий робочий лист. Створюємо таблицю і вводимо наступні формули (рис.8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x(h)	x(2h)	f(x)(h)	f(x)(2h)	h=	0,125	=F1*2
2	0,000	0,000	=1/(1+A2^2)	=1/(1+B2^2)	=($F$1/3)*(C2+4*C3+C4)	=($G$1/3)*(D2+4*D3+D4)	
3	=A2+$F$1	=B2+$G$1	=1/(1+A3^2)	=1/(1+B3^2)			
4	=A3+$F$1	=B3+$G$1	=1/(1+A4^2)	=1/(1+B4^2)	=($F$1/3)*(C4+4*C5+C6)	=($G$1/3)*(D4+4*D5+D6)	
5	=A4+$F$1	=B4+$G$1	=1/(1+A5^2)	=1/(1+B5^2)			
6	=A5+$F$1	=B5+$G$1	=1/(1+A6^2)	=1/(1+B6^2)	=($F$1/3)*(C6+4*C7+C8)		
7	=A6+$F$1		=1/(1+A7^2)				
8	=A7+$F$1		=1/(1+A8^2)		=($F$1/3)*(C8+4*C9+C10)		
9	=A8+$F$1		=1/(1+A9^2)				
10	=A9+$F$1		=1/(1+A10^2)		=SUM(E2;E4;E6;E8)	=SUM(F2;F4;F6)	=ABS(E10-F10)/15

Рис.8

В результаті виконання обчислень отримаємо (рис.9)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x(h)	x(2h)	f(x)(h)	f(x)(2h)	h=	0,125	0,250
2	0,000	0,000	1,0000	1,0000	0,2450	0,4637	
3	0,125	0,250	0,9846	0,9412			
4	0,250	0,500	0,9412	0,8000	0,2187	0,3217	
5	0,375	0,750	0,8767	0,6400			
6	0,500	1,000	0,8000	0,5000	0,1799		
7	0,625		0,7191				
8	0,750		0,6400		0,1419		
9	0,875		0,5664				
10	1,000		0,5000		0,785398	0,785392	0,0000004

Рис.9

8. Варіанти індивідуальних завдань

Методами центральних прямокутників, трапецій та Сімпсона обчислити значення інтегралів і оцінити похибку обчислень за правилом Рунге

1. $\int\limits_{0}^{0,8} x\cos x dx$
2. $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$
3. $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx$
5. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$
6. $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$
7. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}\cos x dx$
8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x^4}}$
9. $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$
10. $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x dx}{x}$
11. $\int\limits_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1} dx$
12. $\int\limits_{0,5}^{1,2} \frac{\tan(x^2)}{x+1} dx$
13. $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$
14. $\int\limits_{0}^{0,25} e^{-x^2} dx$
15. $\int\limits_{0}^{0,1} \sin(x^2) dx$
16. $\int\limits_{0}^{0,8} x^{10}\sin x dx$