Лабораторна робота № 11. Інтерполяція функцій

1. Інтерполяція та апроксимація функцій

На практиці часто зустрічаються випадки, коли для функції невідомий її аналітичний вигляд, а відомі лише її значення в скінченній кількості точок. Ці значення можуть бути навіть наближеними (наприклад, знайдені експериментально). Тому виникає потреба невідому нам функцію наближено замінити більш простішою (наприклад, поліномом), яка б в обчисленнях відображала вихідну функцію.

Будемо вважати, що для функції $y = f(x)$ відомі її значення в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Розглянемо два підходи до побудови наближеної функції:

1) Наближену функцію $y = F(x)$ вибираємо так, щоб в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ вона співпадала з вихідною функцією, тобто виконувалась умова

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,...,n.$$

Такий спосіб наближення будемо називати ***інтерполяцією***, точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***вузлами інтерполяції***, а $y = F(x)$ – інтерполяційною формулою для обчислення значень функції $y = f(x)$.

2) Наближену функцію $y = F(x)$ на інтервалі $[x_0, x_n]$ вибираємо так, щоб різниця $f(x) - F(x)$ на цьому проміжку була мінімальною за певним критерієм. В цьому випадку не вимагається співпадання значень наближеної та вихідної функції в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Такий спосіб наближення будемо називати ***апроксимацією***.

2. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Один з підходів до задачі інтерполяції – метод Лагранжа. Основна ідея цього методу полягає в пошуку поліному, який приймає значення 1 в одному довільному вузлі інтерполяції і значення 0 у всіх інших вузлах.

Наближену функцію $y = F(x)$ представимо у вигляді

$$F(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x) f(x_i),$$

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 0,1,...,n.$$

Оскільки точки $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ є коренями многочлена $P_i(x)$, то його можна записати наступним чином

$$P_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)},$$

а наближена функція $F(x)$, яку називають ***інтерполяційним многочленом Лагранжа***, матиме вигляд

$$F(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} f(x_i).$$

Обчислимо значення інтерполяційного поліному Лагранжа в точці $x = 4$, якщо задано значення вихідної функції в точках:

x	-1	0	1	2	3
y	5	1	1	11	61

3. Обчислення значення поліному Лагранжа за допомогою калькулятора

1. Знаходимо перший доданок суми при $i = 0$ $(x_i = -1)$

$$L\_0 = \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{24}{24} = 1.$$

2. Знаходимо другий доданок суми при $i = 1$ $(x_i = 0)$

$$L\_1 = \frac{(4+1)(4-1)(4-2)(4-3)}{(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{30}{-6} = -5.$$

3. Знаходимо третій доданок суми при $i = 2$ $(x_i = 1)$

$$L\_2 = \frac{(4+1)(4-0)(4-2)(4-3)}{(1+1)(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{40}{4} = 10.$$

4. Знаходимо четвертий доданок суми при $i = 3$ $(x_i = 2)$

$$L\_3 = \frac{(4+1)(4-0)(4-1)(4-3)}{(2+1)(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{60}{-6} = -10.$$

5. Знаходимо п’ятий доданок суми при $i = 4$ $(x_i = 3)$

$$L\_4 = \frac{(4+1)(4-0)(4-1)(4-2)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{120}{24} = 5.$$

6. Знаходимо значення поліному $L_4(4)$

$$L_4(4) = (L\_0)f(-1) + (L\_1)f(0) + (L\_2)f(1) + (L\_3)f(2) + (L\_4)f(3) =$$

$$= 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 1 + 10 \cdot 1 + (-10) \cdot 11 + 5 \cdot 61 = 205.$$

4. Обчислення значення поліному Лагранжа засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист. Створюємо таблицю, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Інтерполяційний поліном Лагранжа											
2								Значення аргумента				
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4												
5												
6												
7												
8												
9	Добутки											
10	Відношення							Результат				

Рис. 1

2. В діапазон **A4:A8** вводимо задані нам значення x_i, а в **B4:B8** – значення функції y_i. В клітинку **L2** вводимо значення аргумента x, при якому буде обчислюватись значення інтерполяційного поліному Лагранжа (в даному випадку $x = 4$).
Обчислюємо різниці чисельника поліному

Комірка	Формула (значення)
C4:G4	**=$L$2-A4**
C5:G5	**=$L$2-A5**
C6:G6	**=$L$2-A6**
C7:G7	**=$L$2-A7**
C8:G8	**=$L$2-A8**

3. В діагональні значення блоку **C4:G8** вводимо число **1** (**C4=D5=E6=F7= =G8=1**).

4. Обчислюємо різниці знаменника поліному

Комірка	Формула (значення)
H4	**=ЕСЛИ($A$4-A4=0;1;$A$4-A4)**
I4	**=ЕСЛИ($A$5-A4=0;1;$A$5-A4)**
J4	**=ЕСЛИ($A$6-A4=0;1;$A$6-A4)**
K4	**=ЕСЛИ($A$7-A4=0;1;$A$7-A4)**
L4	**=ЕСЛИ($A$8-A4=0;1;$A$8-A4)**

Копіюємо кожну з введених формул в межах відповідного стовпчика, заповнюючи формулами блок **H5:L8**.

5. Обчислюємо добутки різниць чисельника та знаменника

Комірка	Формула (значення)
C9	**=ПРОИЗВЕД(C4:C8)**

Копіюємо введену формулу в межах рядка до клітинки **L9** включно.

6. Обчислюємо доданки інтерполяційного поліному, як відношення відповідного значення чисельника та знаменника

Комірка	Формула (значення)
C10	**=C9/H9**

Копіюємо введену формулу в межах рядка до клітинки **G10** включно.

7. Обчислюємо значення інтерполяційного поліному Лагранжа

Комірка	Формула (значення)
L10	**=B4*C10+B5*D10+B6*E10+B7*F10+B8*G10**

В результаті виконання обчислень отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Інтерполяційний поліном Лагранжа											
2								Значення аргумента				4
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4	-1	5	1	5	5	5	5	1	1	2	3	4
5	0	1	4	1	4	4	4	-1	1	1	2	3
6	1	1	3	3	1	3	3	-2	-1	1	1	2
7	2	11	2	2	2	1	2	-3	-2	-1	1	1
8	3	61	1	1	1	1	1	-4	-3	-2	-1	1
9	Добутки		24	30	40	60	120	24	-6	4	-6	24
10	Відношення		1	-5	10	-10	5	Результат				205

Рис. 2

Змінюючи значення аргумента в клітинці **L2** отримаємо нове значення інтерполяційного поліному в клітинці **L10**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Інтерполяційний поліном Лагранжа											
2								Значення аргумента				5
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4	-1	5	1	6	6	6	6	1	1	2	3	4
5	0	1	5	1	5	5	5	-1	1	1	2	3
6	1	1	4	4	1	4	4	-2	-1	1	1	2
7	2	11	3	3	3	1	3	-3	-2	-1	1	1
8	3	61	2	2	2	2	1	-4	-3	-2	-1	1
9	Добутки		120	144	180	240	360	24	-6	4	-6	24
10	Відношення		5	-24	45	-40	15	Результат				521

Рис. 3

5. Інтерполяційний поліном Ньютона

Іншим підходом до задачі інтерполяції є метод Ньютона (метод розділених різниць). Нехай для функції $y = f(x)$ задано її значення в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Треба побудувати такий поліном $P_n(x)$ степеня не вище від n, значення якого у вузлах інтерполювання збігаються із значенням функції $y = f(x)$, тобто

$$P_n(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, \dots, n).$$

Поліном $P_n(x)$ будемо шукати у вигляді

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}),$$

де

$f(x_0; x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ – ***розділена різниця 1-го порядку***;

$f(x_0; x_1; x_2) = \dfrac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0}$ – ***розділена різниця 2-го порядку***;

$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \dfrac{f(x_1; \dots; x_n) - f(x_0; \dots; x_{n-1})}{x_n - x_0}$ – ***розділена різниця*** n ***– го порядку***.

Нехай вузли інтерполяції є рівновіддалені, тобто $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, h – крок інтерполяції.

Скінченною різницею 1-го порядку називають величину

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Скінченну різницю 2-го порядку можна визначити наступним чином

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i).$$

Таким чином, ***скінченну різницю*** n ***– го порядку*** можна записати у вигляді

$$\Delta^n f(x_i) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x_i)) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i).$$

Розділену різницю $n-$го порядку можна виразити через скінченну різницю $n-$го порядку

$$f(x_0;x_1;...;x_n)=\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

Тоді наведений вище поліном можна записати у вигляді

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)(x-x_0)}{1!h}+\frac{\Delta^2 f(x_0)(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}+$$

$$+...+\frac{\Delta^n f(x_0)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{n!h^n},$$

отримане представлення називають ***інтерполяційним поліномом Ньютона для інтерполяціїї вперед*** для рівновіддалених вузлів інтерполяції.
Формули Ньютона та Лагранжа характеризують один і той самий поліном, вони відрізняються лише алгоритмом його побудови.

6. Обчислення значення поліному Ньютона за допомогою калькулятора

1. Знаходимо різниці $x-x_i$, $i=0,1,2,3$, $x=4$

$$x-x_0=4-(-1)=5;\quad x-x_1=4-0=4;$$

$$x-x_2=4-1=3;\quad x-x_3=4-2=2.$$

2. Знаходимо добутки

$$(x-x_0)(x-x_1)=5\cdot 4=20;\quad (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=5\cdot 4\cdot 3=60;$$

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120.$$

3. Знаходимо $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, $\Delta^3 f(x_0)$, $\Delta^4 f(x_0)$:

$$\mathbf{\Delta f(x_0)}=f(x_1)-f(x_0)=1-5=-4;$$

$$\Delta f(x_1)=f(x_2)-f(x_1)=1-1=0;$$

$$\Delta f(x_2)=f(x_3)-f(x_2)=11-1=10;$$

$$\Delta f(x_3)=f(x_4)-f(x_3)=61-11=50;$$

$$\mathbf{\Delta^2 f(x_0)}=\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)=0-(-4)=4;$$

$$\Delta^2 f(x_1)=\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1)=10-0=10;$$

$$\Delta^2 f(x_2)=\Delta f(x_3)-\Delta f(x_2)=50-10=40;$$

$$\mathbf{\Delta^3 f(x_0)}=\Delta^2 f(x_1)-\Delta^2 f(x_0)=10-4=6;$$

$$\Delta^3 f(x_1)=\Delta^2 f(x_2)-\Delta^2 f(x_1)=40-10=30;$$

$$\mathbf{\Delta^4 f(x_0)}=\Delta^3 f(x_1)-\Delta^3 f(x_0)=30-6=24;$$

4. Враховуючи, що $h = 1$ знаходимо значення доданків поліному

$$f(x_0) = 5; \quad \Delta f(x_0)(x - x_0) = -4 \cdot 5 = -20;$$

$$\frac{\Delta^2 f(x_0)(x - x_0)(x - x_1)}{2} = \frac{4 \cdot 20}{2} = 40;$$

$$\frac{\Delta^3 f(x_0)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} = \frac{6 \cdot 60}{6} = 60;$$

$$\frac{\Delta^4 f(x_0)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{24} = \frac{24 \cdot 120}{24} = 120.$$

5. Сумуємо значення знайдених доданків і отримуємо результат

$$P_4(4) = 5 - 20 + 40 + 60 + 120 = 205.$$

7. Обчислення значення поліному Ньютона засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист. Створюємо таблицю, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Інтерполяційний поліном Ньютона								
2	Крок інтерполяції h=				Значення аргумента				
3		x	y	Скінченні різниці				$x-x_i$	
4				Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$x-x_0$	
5	x_0							$x-x_1$	
6	x_1							$x-x_2$	
7	x_2							$x-x_3$	
8	x_3							i = 0,1,2,3	
9	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)$							Результат	
10	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)\Delta^{i+1}f(x_0)$								
11	Степені кроку								
12	Факторіали								
13	Доданки								

Рис. 4

2. В діапазон **B4:B8** вводимо задані нам значення x_i, а в **C4:C8** – значення функції y_i. В клітинку **I2** вводимо значення аргумента x, при якому буде обчислюватись значення інтерполяційного поліному Ньютона (в даному випадку $x = 4$).

3. Визначаємо крок інтерполяції різниці та різниці $x - x_i$, $i = 0,1,2,3,\ x = 4$

Комірка	Формула (значення)
D2	**=B5-B4**
I4	**=$I$2-B4**

Копіюємо введену в клітинку **I4** формулу в межах стовпчика до клітинки **I7** включно.

4. Обчислюємо скінченні різниці $\Delta f(x_0), \Delta^2 f(x_0), \Delta^3 f(x_0), \Delta^4 f(x_0)$

Комірка	Формула (значення)	Комірка	Формула (значення)
D5	=C5-C4	F5	=E6-E5
E5	=D6-D5	G5	=F6-F5

Копіюємо кожну з введених формул в межах відповідного стовпчика, заповнюючи формулами трикутник з вершинами **D5, D8, G5**.

5. Обчислюємо $(x-x_0)(x-x_1)$,$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$, $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Комірка	Формула (значення)
D9	=I4
E9	=I4*I5
F9	=I4*I5*I6
G9	=I4*I5*I6*I7

6. Домножуємо отримані в попередньому пункті значення на відповідні їм скінченні різниці

Комірка	Формула (значення)
D10	=D5*D9

Копіюємо введену в клітинку **D10** формулу в межах рядка до клітинки **G10** включно.

7. Вводимо в таблицю степені кроку h^n та відповідні їм значення факторіалів $n!$

Комірка	Формула (значення)	Комірка	Формула (значення)
D11	=D2	D12	1
E11	=D2^2	E12	2
F11	=D2^3	F12	6
G11	=D2^4	G12	24

8. Обчислюємо доданки і значення інтерполяційного поліному Ньютона

Комірка	Формула (значення)
C13	=C4
D13	=D10/(D11*D12)

Копіюємо введену в клітинку **D13** формулу в межах рядка до клітинки **G13** включно.

Комірка	Формула (значення)
H13	=СУММ(C13:G13)

В результаті виконання обчислень отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Інтерполяційний поліном Ньютона								
2	Крок інтерполяції h=			1	Значення аргумента				4
3		x	y	Скінченні різниці				$x-x_i$	
4		-1	5	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$x-x_0$	5
5	x_0	0	1	-4	4	6	24	$x-x_1$	4
6	x_1	1	1	0	10	30		$x-x_2$	3
7	x_2	2	11	10	40			$x-x_3$	2
8	x_3	3	61	50				i = 0,1,2,3	
9	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)$			5	20	60	120	Результат	
10	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)\Delta^{i+1}f(x_0)$			-20	80	360	2880		
11	Степені кроку			1	1	1	1		
12	Факторіали			1	2	6	24		
13	Доданки		5	-20	40	60	120	205	

Рис. 5

Змінюючи значення аргумента в клітинці **I2** отримаємо нове значення інтерполяційного поліному Ньютона в клітинці **H13**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Інтерполяційний поліном Ньютона								
2	Крок інтерполяції h=			1	Значення аргумента				5
3		x	y	Скінченні різниці				$x-x_i$	
4		-1	5	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$x-x_0$	6
5	x_0	0	1	-4	4	6	24	$x-x_1$	5
6	x_1	1	1	0	10	30		$x-x_2$	4
7	x_2	2	11	10	40			$x-x_3$	3
8	x_3	3	61	50				i = 0,1,2,3	
9	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)$			6	30	120	360	Результат	
10	$(x-x_0)\ldots(x-x_i)\Delta^{i+1}f(x_0)$			-24	120	720	8640		
11	Степені кроку			1	1	1	1		
12	Факторіали			1	2	6	24		
13	Доданки		5	-24	60	120	360	521	

Рис. 6

8. Хід роботи

1. Обчисліть значення многочленів Лагранжа та Ньютона згідно наведеного зразку
2. Обчисліть значення многочленів Лагранжа та Ньютона для свого варіанту індивідуального завдання (x_i - вузли інтерполяції, y_i - значення функції в вузлах інтерполяції, x - значення аргументу многочленів).

№	Індивідуальне завдання						x
1.	x_i	-2	-1	0	1	2	5
	y_i	0,37	1,00	2,72	7,39	20,09	
2.	x_i	-4	-2	0	2	4	-3,5
	y_i	3,26	1,59	2,50	3,41	1,74	
3.	x_i	-1	0	1	2	3	-10
	y_i	7,5	-5,5	-16,5	-25,5	-32,5	

4.	x_i	-5	-3	-1	1	3	12
	y_i	25,96	8,86	0,16	1,84	9,14	
5.	x_i	1	4	7	10	13	32
	y_i	1,37	5,40	8,95	12,30	15,56	
6.	x_i	-5	-3	-1	1	3	11
	y_i	173,41	29,09	3,72	1,37	25,01	
7.	x_i	-2	-1	0	1	2	24
	y_i	-1,51	0,38	1,00	0,70	0,67	
8.	x_i	-5	0	5	10	15	46
	y_i	33,16	35,00	33,16	34,41	34,15	
9.	x_i	-2	-1	0	1	2	6
	y_i	-21	6	7	0	3	
10.	x_i	-3	-1	1	3	5	-8
	y_i	48	6	0	34	252	
11.	x_i	-2	-1	0	1	2	20
	y_i	13,39	4,72	1,00	0,37	2,14	
12.	x_i	-4	-2	0	2	4	13
	y_i	67,27	18,08	-5,00	18,08	67,27	
13.	x_i	3	4	5	6	7	-16
	y_i	-42,14	67,27	98,58	139,20	192,23	
14.	x_i	3	5	7	9	11	26
	y_i	10,84	11,04	9,91	10,42	11	
15.	x_i	-5	-3	-1	1	3	12
	y_i	153,41	32,09	4,72	0,37	6,05	