Лабораторна робота № 10. Розв’язання нелінійних рівнянь (метод простих ітерацій, метод дотичних, метод хорд)

1. Метод простих ітерацій (послідовних наближень)

Для методу простих ітерацій задане рівняння $f(x)=0$ потрібно перетворити до вигляду $x=\varphi(x)$. Після цього для знаходження послідовних наближень використовують рекурентні формули $x_n=\varphi(x_{n-1})$ ($n=1,2,...$).

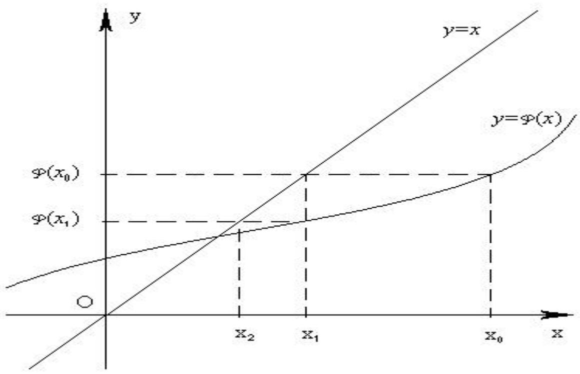

Рис. 1

Незалежно від вибору початкового наближення x_0 умовою збіжності такого ітераційного процесу є виконання на відрізку $[a;b]$ нерівності $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

Для оцінки похибки методу можна скористатися співвідношеннями

$$|x^*-x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \quad \text{або} \quad |x^*-x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

2. Реалізація методу простих ітерацій за допомогою калькулятора

1. Рівняння $x-\cos(x)=0$ можна подати у вигляді $x=\cos(x)$, тобто $\varphi(x)=\cos(x)$. На відрізку $[0;1{,}5]$ $\varphi'(x)=\sin(x)\le\sin(1{,}5)\approx 0{,}997495<1$, тобто ітераційний процес $x_n=\cos(x_{n-1})$ збігається.

2. Приймемо за x_0 довільне число з відрізка $[0;1{,}5]$, наприклад $x_0=0{,}5$.

Знаходимо $x_1=\cos(x_0)=\cos(0{,}5)\approx 0{,}877583$.

3. Наступні наближення.

$x_2=\cos(x_1)\approx\cos(0{,}877583)\approx 0{,}639012$,

$x_3=\cos(x_2)\approx\cos(0{,}639012)\approx 0{,}802685$,

$x_4=\cos(x_3)\approx\cos(0{,}802685)\approx 0{,}694778$,

$x_5 = \mathbf{cos}(x_4) \approx \mathbf{cos}(0{,}694778) \approx 0{,}768189$,

$x_6 = \mathbf{cos}(x_5) \approx \mathbf{cos}(0{,}768189) \approx 0{,}719170$,

$x_7 = \mathbf{cos}(x_6) \approx \mathbf{cos}(0{,}719170) \approx 0{,}752353$.

Як бачимо, послідовні наближення збігаються, і точність знайденого розв'язку на 7-ій ітерації рівна $|x_7 - x_6| = 0{,}033183$. Продовжуючи обчислення, можна знайти розв'язок з довільною наперед заданою точністю.

3. Реалізація методу простих ітерацій засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму OpenOffice , переходимо на вільний робочий лист. Заповнюємо заголовки стовпців.

2. В комірку B2 записуємо початкове наближення: 0,5, а в комірки C2, D2 та B3 – відповідні формули для обчислень:

Комірка	**Формула**
C2	**=COS(B2)**
D2	**=ABS(B2-C2)**
B3	**=C2**

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця C не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε.

	A	B	C	D
1	Номер ітерації	*x*	*x=fi(x)*	*|x-x|*
2	1	0,50000	0,87758	0,37758
3	2	0,87758	0,63901	0,23857
4	3	0,63901	0,80269	0,16367
5	4	0,80269	0,69478	0,10791
6	5	0,69478	0,76820	0,07342
7	6	0,76820	0,71917	0,04903
8	7	0,71917	0,75236	0,03319
9	8	0,75236	0,73008	0,02227
10	9	0,73008	0,74512	0,01504
11	10	0,74512	0,73501	0,01011
12	11	0,73501	0,74183	0,00682
13	12	0,74183	0,73724	0,00459
14	13	0,73724	0,74033	0,00309
15	14	0,74033	0,73825	0,00208
16	15	0,73825	0,73965	0,00140
17	16	0,73965	0,73870	0,00095
18	17	0,73870	0,73934	0,00064
19	18	0,73934	0,73891	0,00043
20	19	0,73891	0,73920	0,00029
21	20	0,73920	0,73901	0,00019
22	21	0,73901	0,73914	0,00013
23	22	0,73914	0,73905	0,00009
24				

Рис. 2

Для методу ітерацій точність досягається на 22-му кроці алгоритму. Наближений розв'язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця C.

4. Метод дотичних

Нехай ліва частина $f(x)$ заданого рівняння $f(x)=0$ неперервна на відрізку $[a,b]$, на якому відокремлено корінь разом з похідними $f'(x)$ та $f''(x)$, причому $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають знак на цьому відрізку. Застосування методу дотичних ґрунтується на побудові послідовних наближень до розв'язку x^* рівняння за допомогою рекурентних співвідношень

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Геометрично формули методу можна інтерпретувати так: наступне наближення x_n до розв'язку рівняння знаходимо як точку перетину з віссю Ox дотичної $y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$ до графіка функції $f(x)$ у точці x_{n-1} (див. рис. 3). З цього факту і походить назва методу.

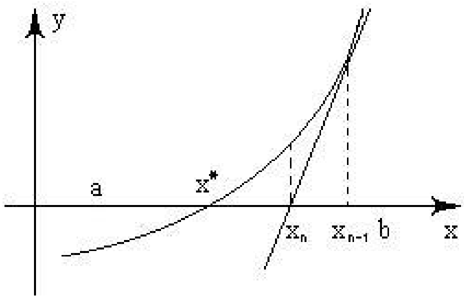

Рис. 3

Вибір початкового наближення x_0 залежить від знака другої похідної $f''(x)$ на кінцях відрізка $[a,b]$. Оскільки на цьому відрізку міститься відокремлений корінь рівняння то значення $f(a)$ та $f(b)$ мають протилежні знаки. За припущенням $f''(x)$ на відрізку $[a,b]$ зберігає знак, то матиме місце одна з двох таких ситуацій.

I. Значення $f(a)$ та $f''(a)$ мають одинаковий знак, тобто $f(a)f''(a) > 0$. В цьому випадку за початкове наближення приймаємо $x_0 = a$.

II. Значення $f(b)$ та $f''(b)$ мають одинаковий знак, тобто $f(b)f''(b) > 0$. В цьому випадку за початкове наближення приймаємо $x_0 = b$.

5. Реалізація методу дотичних за допомогою калькулятора

1. Для рівняння $x - \cos(x) = 0$ маємо $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$, $f''(x) = \cos(x)$. Шукатимемо корінь рівняння на відрізку $[0;1{,}5]$. На кінцях відрізка $f(0) = -1$, $f''(0) = 1$, $f(1{,}5) \approx 1{,}429262$, $f''(1{,}5) \approx 0{,}070738$, отже початкове наближення $x_0 = 1{,}5$.

2. Знаходимо x_1 за формулою $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

$f(1{,}5) = 1{,}5 - \mathbf{cos}(1{,}5) \approx 1{,}429262$, $\quad f'(1{,}5) = 1 + \mathbf{sin}(1{,}5) \approx 1{,}997495$

$$x_1 \approx 1{,}5 - \frac{1{,}429262}{1{,}997495} \approx 0{,}784473.$$

3. Наступне наближення $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$:

$f(x_1) = 0{,}784473 - \mathbf{cos}(0{,}784473) \approx 0{,}076712$, $f'(x_1) = 1 + \mathbf{sin}(0{,}784473) \approx 1{,}706452$,

$$x_2 \approx 0{,}784473 - \frac{0{,}076712}{1{,}706452} \approx 0{,}739519.$$

Продовжуючи обчислення, можна знайти розв'язок із заданою точністю.

6. Реалізація методу дотичних засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист (або створюємо новий). Записуємо заголовки таблиці, для обчислень

	A	B	C	D	E	F
1	**Номер ітерації**	*x*	*f(x)*	*f'(x)*	*x̲=x-f(x)/f'(x)*	*|x̲-x|*
2						
3						
4						

Рис .4

2. В комірку **B2** записуємо початкове наближення: **1,5**. В комірки **C2, D2, E2, F2** та **B3** – відповідні формули для обчислень (див. рис.5).

	A	B	C	D	E	F
1	**Номер ітерації**	*x*	*f(x)*	*f'(x)*	*x̲=x-f(x)/f'(x)*	*|x̲-x|*
2	1	1,5	=B2-COS(B2)	=1+SIN(B2)	=B2-C2/D2	=ABS(B2-E2)
3	2	=E2	=B3-COS(B3)	=1+SIN(B3)	=B3-C3/D3	=ABS(B3-E3)
4	3	=E3	=B4-COS(B4)	=1+SIN(B4)	=B4-C4/D4	=ABS(B4-E4)

Рис. 5

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця **F** не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε.

	A	B	C	D	E	F
1	**Номер ітерації**	*x*	*f(x)*	*f'(x)*	*x̲=x-f(x)/f'(x)*	*|x̲-x|*
2	1	1,50000	1,42926	1,99749	0,78447	0,71553
3	2	0,78447	0,07671	1,70645	0,73952	0,04495
4	3	0,73952	[illegible]	[illegible]393	0,73909	0,00043
5	4	0,73909	[illegible]	[illegible]361	0,73909	0,00000
6						
7						

Шуканий наближений розв'язок

Рис .6

Для методу дотичних точність у 5 знаків після коми досягається вже на 4-му кроці алгоритму. Наближений розв'язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця **B**.

7. Метод хорд (січних)

Нехай ліва частина $f(x)$ заданого рівняння $f(x)=0$ неперервна на відрізку $[a,b]$, на якому відокремлено корінь ($f(a)f(b)<0$) і, крім того, похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ визначені і зберігають знак на цьому відрізку.

Перше наближення x_1 до розв'язку рівняння x^* знаходимо за формулою

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Залежно від вигляду функції $f(x)$ тут можливі два випадки.

I. Шуканий розв'язок x^* розташований на відрізку $[x_1,b]$. Така ситуація можлива, коли на відрізку $[a,b]$ $f'(x)>0$ і $f''(x)>0$ (див. рис. 7а)), або $f'(x)<0$ і $f''(x)<0$ (рис. 7б). Обидва ці варіанти можна об'єднати за допомогою умови $f'(x)f''(x)>0$. В цьому випадку ітераційний процес методу хорд будується за формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-b)f(x_n)}{f(x_n)-f(b)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Отриманий ітераційний процес збігається, бо $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<x^*$, тобто послідовність $\{x_n\}$ є монотоно зростаючою та обмеженою зверху.

II. Шуканий розв'язок x^* розташований на відрізку $[a,x_1]$. Така ситуація можлива, коли на відрізку $[a,b]$ $f'(x)<0$ і $f''(x)>0$ (див. рис. 7в)), або $f'(x)>0$ і $f''(x)<0$ (рис. 7г). Для обидвох варіантів $f'(x)f''(x)>0$. В цьому випадку ітераційний процес методу хорд будується за формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

В цьому випадку $x^*<x_n<\ldots<x_2<x_1<b$, тобто послідовність $\{x_n\}$ збігається бо вона монотоно спадна та обмежена знизу. Для обидвох випадків приблизну оцінку отриманого наближення можна отримати у формі $|x^*-x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$, де $0 \le m \le |f'(x)|$.

Для оцінки похибки наближення можна також використрвувати величину $|x_{n+1}-x_n|$.

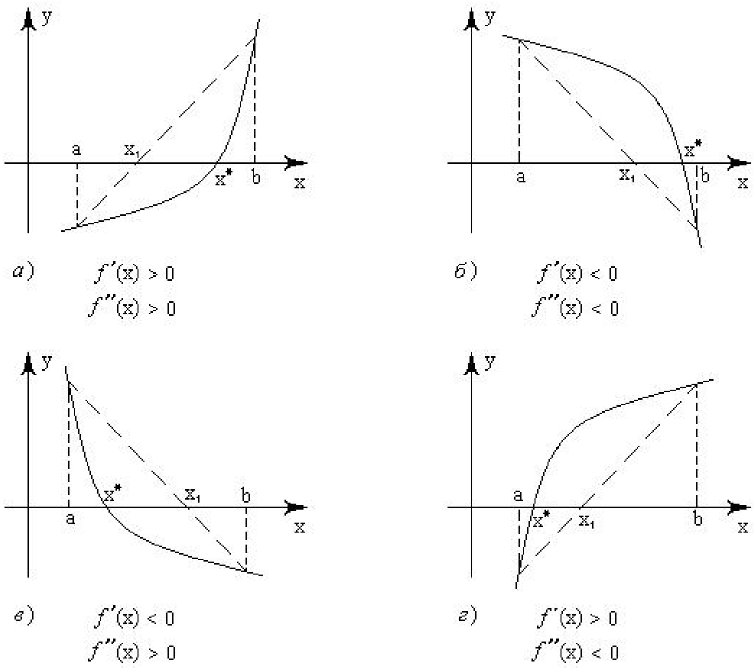

Рис.7

8. Реалізація методу хорд за допомогою калькулятора

1. Для рівняння $x - \cos(x) = 0$ маємо $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$, $f''(x) = \cos(x)$. Як і у випадку методу бісекції шукатимемо корінь рівняння на відрізку $[0;1{,}5]$. Для всіх точок x цього відрізка $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$, отже послідовні наближення будуємо за формулами $x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - b) f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}$.

2. Знаходимо x_1 за формулою $x_1 = a - \dfrac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}$.

$a = 0$, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$,

$b = 1{,}5$, $f(1{,}5) = 1{,}5 - \cos(1{,}5) \approx 1{,}5 - 0{,}070737 = 1{,}429263$,

$$x_1 \approx 0 - \frac{(1{,}5 - 0) \cdot (-1)}{1{,}429263 - (-1)} \approx 0{,}617471.$$

3. Наступні наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - b) f(x_1)}{f(x_1) - f(b)},$$

$f(x_1) = 0{,}617471 - \cos(0{,}617471) \approx -0{,}197874$,

$$x_1 \approx 0{,}617471 - \frac{(0{,}617471 - 1{,}5 - 0) \cdot (-0{,}197874)}{-0{,}197874 - 1{,}429263} \approx 0{,}724794.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - b) f(x_2)}{f(x_2) - f(b)},$$

$f(x_2) = 0{,}724794 - \cos(0{,}724794) \approx -0{,}023842$,

$$x_3 \approx 0{,}724794 - \frac{(0{,}724794 - 1{,}5)\cdot(-0{,}023842)}{-0{,}023842 - 1{,}429263} \approx 0{,}737513.$$

Як бачимо, після трьох кроків методу хорд величина $|x_{n+1} - x_n|$ становить $|x_3 - x_2| \approx 0{,}737513 - 0{,}724794 = 0{,}012719$, продовжуючи обчислення, можна знайти таке x_n, для якого вона стане меншою ніж задана точність обчислення. Таким чином, можна стверджувати, що після трьох кроків методу хорд корінь рівняння знайдено з точністю $0{,}013$.

9. Реалізація методу хорд засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму OpenOffice , переходимо на вільний робочий лист.

Заповнюємо заголовок таблиці, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	*x*	*f(a)*	*f(x)*	*x* = *x-f(x)(a-x)/(f(a)-f(x))*	|*x* -*x*|
2						
3						
4						

Рис. 8

2. Заповнюємо комірки з початковими наближеннями та формулами для обчислень:

Комірка	**Формула (значення)**
B2	**0 (початкове наближення)**
C2	**=1,5-COS(1,5)**
D2	**=B2-COS(B2)**
E2	**=B2-D2*(1,5-B2)/(C2-D2)**
F2	**=ABS(B2-E2)**
B3	**=E2 (наступненаближення)**

Для комірок діапазону **B3:F3** копіюємо формули із відповідних комірок діапазону **B2:F2**.

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця F не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε .

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	*x*	*f(a)*	*f(x)*	*x* = *x-f(x)(a-x)/(f(a)-f(x))*	|*x* -*x*|
2	1	0	=1,5-COS(1,5)	=B2-COS(B2)	=B2-D2*(1,5-B2)/(C2-D2)	=ABS(B2-E2)
3	2	=E2	=1,5-COS(1,5)	=B3-COS(B3)	=B3-D3*(1,5-B3)/(C3-D3)	=ABS(B3-E3)
4	3	=E3	=1,5-COS(1,5)	=B4-COS(B4)	=B4-D4*(1,5-B4)/(C4-D4)	=ABS(B4-E4)

Рис. 9

4. Для методу хорд точність **0,00002** досягається вже на **6** кроці (див. рис. 10). Наближений розв’язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця **B**. Щоб скопіювати отриманий розв’язок в довільну клітинку під побудованою таблицею можна скористатися командою спеціальної вставки ***Edit* ⇒ *Paste Special* ⇒ *Values*** (***Правка* ⇒ *Спеціальна вставка* ⇒ *Значення***). Перед цим потрібно скопіювати комірку, що містить отриманий результат до буфера обміну.

	A	B	C	D	E	F
1	**Номер ітерації**	***x***	***f(a)***	***f(x)***	***x-f(x)(a-x)/(f(a)-***	**|*x* -*x*|**
2	1	0,00000	1,42926	-1,00000	0,61747	0,61747
3	2	0,61747	1,42926	-0,19787	0,72479	0,10732
4	3	0,72479	1,42926	-0,02384	0,73751	0,01272
5	4	0,73751	1,42926	-0,00263	0,73891	0,00140
6	5	0,73891	1,42926	-0,00029	0,73907	0,00015
7	6	0,73907	1,42926	-0,00003	0,73908	0,00002
8						
9			Розв'язок	0,73908		
10						

Рис. 10

10. Хід роботи

1) Уточніть корінь наведеного у зразку рівняння $x - \cos(x) = 0$ методами простої ітерації, дотичних та хорд з точністю $\varepsilon = 0{,}000092$.

2) Уточніть довільний корінь рівняння $x^3 - Bx^2 + Cx - D = 0$ свого варіанту методами простої ітерації, дотичних та хорд з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$

Варіант	**B**	**C**	**D**
1	**-4.888**	**-2.930**	**14.149**
2	**-4.576**	**-3.915**	**13.792**
3	**-4.264**	**-4.835**	**13.336**
4	**-3.952**	**-5.690**	**12.788**
5	**-3.640**	**-6.480**	**12.154**
6	**-3.327**	**-7.204**	**11.442**
7	**-3.015**	**-7.864**	**10.657**
8	**-2.703**	**-8.459**	**9.807**
9	**-2.391**	**-8.989**	**8.899**
10	**-2.079**	**-9.454**	**7.939**

11	-1.766	-9.854	6.934
12	-1.454	-10.189	5.890
13	-1.142	-10.459	4.815
14	-0.830	-10.665	3.716
15	-0.518	-10.805	2.598